

1. Дана треугольная пирамида $OABC$, причем все плоские углы при вершине O — прямые. Пусть r — радиус ее вписанной сферы, а H — ортоцентр грани ABC . Докажите, что $OH \leq r(\sqrt{3} + 1)$.

2. На доске написан многочлен x . Разрешается выписывать на доску сумму или произведение любых двух записанных многочленов (возможно, совпадающих). Можно ли за 13 дописываний получить многочлен с корнем $x_0 = -10^6$?

3. На стороне CA треугольника ABC выбрана точка B_1 . Обозначим через A_1 и C_1 центры окружностей, вписанных в треугольники ABB_1 и CBB_1 , а через A_2 и C_2 — центры их внеписанных окружностей, касающихся сторон AB_1 и B_1C . Докажите, что если существует положение точки B_1 , при котором четырехугольник $A_1C_1C_2A_2$ вписан, то этот четырехугольник вписан при любом положении B_1 на стороне CA .

4. Найти все приведенные квадратные трехчлены с целыми коэффициентами $P(x)$, для каждого из которых существует такой многочлен с целыми коэффициентами $Q(x)$, что каждый из коэффициентов a_0, \dots, a_k многочлена $P(x) \cdot Q(x) = a_k x^k + \dots + a_0$ равен ± 1 .

5. Для положительных x, y, z , удовлетворяющих условию $x + y + z = 1$, докажите неравенство

$$\frac{xy}{\sqrt{xy + yz}} + \frac{yz}{\sqrt{yz + zx}} + \frac{zx}{\sqrt{zx + xy}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

6. На доске в ряд записаны 4 положительных числа. Каждую минуту ученик заменяет их по следующему правилу: если в ряд записаны числа a, b, c, d , то он записывает вместо них числа ab, bc, cd, da . Известно, что через некоторое время на доске появились те же числа, что были вначале. Докажите, что изначально были записаны четыре единицы.

7. Решить в целых числах уравнение $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc + 7$.

8. На плоскости отмечены вершины правильного 2007-угольника. Затем из них стерли несколько вершин так, что не осталось трех точек, образующих правильный треугольник. Докажите, что либо какие-то две соседние вершины, либо какие-то две вершины через одну оказались стертыми.

9. Окружность ω проходит через вершины A, B треугольника ABC и вторично пересекает стороны AC, BC в точках L, K соответственно. Точка M — середина дуги LK , лежащей внутри треугольника ABC . Прямая AM пересекает прямые BL и BK в точках D и F , соответственно. Прямая BM пересекает прямые AL и AK в точках G и E , соответственно. Докажите, что если $EF \parallel DG$, то AB — диаметр ω .

10. Какое максимальное число подмножеств n -элементного множества можно выбрать, чтобы любые два пересекались, а любые три — нет?

1. Дана треугольная пирамида $OABC$, причем все плоские углы при вершине O — прямые. Пусть r — радиус ее вписанной сферы, а H — ортоцентр грани ABC . Докажите, что $OH \leq r(\sqrt{3} + 1)$.

2. Докажите, что для каждого натурального $n > 2$ найдутся n таких различных натуральных чисел, что произведение любых двух из них делится на сумму оставшихся.

3. На стороне CA треугольника ABC выбрана точка B_1 . Обозначим через A_1 и C_1 центры окружностей, вписанных в треугольники ABB_1 и $CB B_1$, а через A_2 и C_2 — центры их внеписанных окружностей, касающихся сторон AB_1 и B_1C . Докажите, что если существует положение точки B_1 , при котором четырехугольник $A_1C_1C_2A_2$ вписан, то этот четырехугольник вписан при любом положении B_1 на стороне CA .

4. На поле 8×8 расположен корабль 2×2 . Выстрел состоит в указании некоторой клетки, на что отвечают “попал” или “мимо”, в зависимости от того, содержит корабль эту клетку или нет. Докажите, что за 15 выстрелов всегда можно обнаружить этот корабль. (Требуется указать все клетки, из которых состоит корабль, а не “утопить” его.)

5. На окружности отмечено n точек. Известно, что среди всевозможных расстояний между двумя отмеченными точками не более 100 различных. Каково наибольшее возможное значение числа n ?

6. На доске в ряд записаны 4 положительных числа. Каждую минуту ученик заменяет их по следующему правилу: если в ряд записаны числа a, b, c, d , то он записывает вместо них числа ab, bc, cd, da . Известно, что через некоторое время на доске появились те же числа, что были вначале. Докажите, что изначально были записаны четыре единицы.

7. Решить в целых числах уравнение $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc + 7$.

8. На плоскости отмечены вершины правильного 2007-угольника. Затем из них стерли несколько вершин так, что не осталось трех точек, образующих правильный треугольник. Докажите, что либо какие-то две соседние вершины, либо какие-то две вершины через одну оказались стертыми.

9. Функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ задается равенством $f(m) = m + [\sqrt{m}]$. Докажите, что для любого $m \in \mathbb{N}$ при некотором $k \in \mathbb{N}$ число

$$f^{(k)}(m) = \underbrace{f(f(\dots f(m)))}_k$$

является точным квадратом.

10. Окружность ω проходит через вершины A, B треугольника ABC и вторично пересекает стороны AC, BC в точках L, K соответственно. Точка M — середина дуги LK , лежащей внутри треугольника ABC . Прямая AM пересекает прямые BL и BK в точках D и F , соответственно. Прямая BM пересекает прямые AL и AK в точках G и E , соответственно. Докажите, что прямые DE и FG параллельны.

1. Дана треугольная пирамида $OABC$, причем все плоские углы при вершине O — прямые. Пусть r — радиус ее вписанной сферы, а H — ортоцентр грани ABC . Докажите, что $OH \leq r(\sqrt{3} + 1)$.

2. Докажите, что для каждого натурального $n > 2$ найдутся n таких различных натуральных чисел, что произведение любых двух из них делится на сумму оставшихся.

3. На стороне CA треугольника ABC выбрана точка B_1 . Обозначим через A_1 и C_1 центры окружностей, вписанных в треугольники ABB_1 и CBB_1 , а через A_2 и C_2 — центры их внеписанных окружностей, касающихся сторон AB_1 и B_1C . Докажите, что если существует положение точки B_1 , при котором четырехугольник $A_1C_1C_2A_2$ вписан, то этот четырехугольник вписан при любом положении B_1 на стороне CA .

4. На поле 8×8 расположен корабль 2×2 . Выстрел состоит в указании некоторой клетки, на что отвечают “попал” или “мимо”, в зависимости от того, содержит корабль эту клетку или нет. Докажите, что за 15 выстрелов всегда можно обнаружить этот корабль. (Требуется указать все клетки, из которых состоит корабль, а не “утопить” его.)

5. На окружности отмечено n точек. Известно, что среди всевозможных расстояний между двумя отмеченными точками не более 100 различных. Каково наибольшее возможное значение числа n ?

6. На доске в ряд записаны 4 положительных числа. Каждую минуту ученик заменяет их по следующему правилу: если в ряд записаны числа a, b, c, d , то он записывает вместо них числа ab, bc, cd, da . Известно, что через некоторое время на доске появились те же числа, что были вначале. Докажите, что изначально были записаны четыре единицы.

7. Решить в целых числах уравнение $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc + 7$.

8. На плоскости отмечены вершины правильного 2007-угольника. Затем из них стерли несколько вершин так, что не осталось трех точек, образующих правильный треугольник. Докажите, что либо какие-то две соседние вершины, либо какие-то две вершины через одну оказались стертыми.

9. Функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ задается равенством $f(m) = m + [\sqrt{m}]$. Докажите, что для любого $m \in \mathbb{N}$ при некотором $k \in \mathbb{N}$ число

$$f^{(k)}(m) = \underbrace{f(f(\dots f(m)))}_k$$

является точным квадратом.

10. Окружность ω проходит через вершины A, B треугольника ABC и вторично пересекает стороны AC, BC в точках L, K соответственно. Точка M — середина дуги LK , лежащей внутри треугольника ABC . Прямая AM пересекает прямые BL и BK в точках D и F , соответственно. Прямая BM пересекает прямые AL и AK в точках G и E , соответственно. Докажите, что прямые DE и FG параллельны.

1. Дан треугольник ABC . Окружность ω_1 с центром на отрезке AB проходит через точку A и пересекает вторично отрезки AB и AC в точках A_1 и A_2 соответственно. Окружность ω_2 с центром на отрезке BC проходит через точку C и пересекает вторично отрезки BC и AC в точках C_1 и C_2 , соответственно. Известно, что окружности ω_1 и ω_2 касаются в точке K внешним образом. Докажите, что $\angle A_1KC_1 = \angle A_2KC_2$.

2. На доске написано число -10^6 . Разрешается выписывать на доску сумму или произведение любых двух уже записанных чисел (возможно, совпадающих). Можно ли за 50 дописываний получить на доске 0?

3. На стороне CA треугольника ABC выбрана точка B_1 . Обозначим через A_1 и C_1 центры окружностей, вписанных в треугольники ABB_1 и CB_1B , а через A_2 и C_2 — центры их невписанных окружностей, касающихся сторон AB_1 и B_1C . Докажите, что если существует положение точки B_1 , при котором четырехугольник $A_1C_1C_2A_2$ вписан, то этот четырехугольник вписан при любом положении B_1 на стороне CA .

4. На поле 8×8 расположен корабль 2×2 . Выстрел состоит в указании некоторой клетки, на что отвечают “попал” или “мимо”, в зависимости от того, содержит корабль эту клетку или нет. Докажите, что за 16 выстрелов всегда можно обнаружить этот корабль. (Требуется указать все клетки, из которых состоит корабль, а не “утопить” его.)

5. На окружности отмечено n точек. Известно, что среди всевозможных расстояний между двумя отмеченными точками не более 100 различных. Каково наибольшее возможное значение числа n ?

6. На доске в ряд записаны 4 положительных числа. Каждую минуту ученик заменяет их по следующему правилу: если в ряд записаны числа a, b, c, d , то он записывает вместо них числа ab, bc, cd, da . Известно, что через некоторое время на доске появились те же числа, что были вначале. Докажите, что изначально были записаны четыре единицы.

7. Решить в целых числах уравнение $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc + 7$.

8. На плоскости отмечены вершины правильного 2007-угольника. Затем из них стерли несколько вершин так, что не осталось трех точек, образующих правильный треугольник. Докажите, что либо какие-то две соседние вершины, либо какие-то две вершины через одну оказались стертыми.

9. Найдите все такие натуральные $n > 4$, что первые n натуральных чисел можно разбить на 4 группы с равными суммами.

10. Окружность ω проходит через вершины A, B треугольника ABC и вторично пересекает стороны AC, BC в точках L, K соответственно. Точка M — середина дуги LK , лежащей внутри треугольника ABC . Прямая AM пересекает прямые BL и BK в точках D и F , соответственно. Прямая BM пересекает прямые AL и AK в точках G и E , соответственно. Докажите, что прямые DE и FG параллельны.